

# 柵 (fence)

- ▶ 問題: asi1024, joisino
- ▶ 解答: amano, drafeear, joisino, sndtkrh
- ▶ 解説: joisino

## 問題概要

- ▶ グリッドに上下左右に動くヤギがたくさんいる
- ▶ マスにヤギが通行不能な柵を設置する
- ▶ ヤギがグリッドの外へ出られないようにしたい
- ▶ 設置する必要のある柵の最小個数を求めよ
- ▶ グリッドの大きさは縦横 100 以下

# サンプル入出力

.....

.....

..X..

.....

.....

..#..

..#X#.

..#..

▶ これはこう

# サンプル入出力

..

.X

▶ これは無理

## サンプル入出力

.....

.....

..X...

.X..X.

..X...

.....

.....

..#...

.#X##.

#X..X#

.#X##.

..#...

▶ これはこう

# 考察

- ▶ 自明な考察として、端にヤギがいると、-1
- ▶ そうでない場合は外周に柵を設置すると閉じ込められるので解が存在する

## 考察

- ▶ ヤギたちと、グリッドの外をできるだけ少ない柵で分離したい

答え

最小カット

# 答え

- ▶ 辺 (マスとマスの境界) に柵を設置するのではなく、頂点 (マス) の上に設置するので、各マスを 2 つの頂点に分離して、その間に容量 1 の辺を張ることで対処する
- ▶ それ以外の辺は、そこで切られたら困るので、容量 INF の辺を張って接続関係を表現する

## 答え

- ▶ グリッドの各マスについて in と out の 2 つの頂点を作る
- ▶ 各マスの in から out へ、ヤギがいなければ容量 1 の辺を、いれば容量 INF の辺を張る
- ▶ 各マスの out から隣接しているマスの in に容量 INF の辺を張る
- ▶ S からヤギのいるマスの out に容量 INF の辺を張る
- ▶ 端のマスの out から T に容量 INF の辺を張る
- ▶ 以上のグラフの S と T の最小カット容量が答えである

## 証明

- ▶ 最小カット容量  $\leq$  最適な柵の数 について
- ▶ 柵を設置したマスの in から out への辺を取り除くと、グラフの作り方と柵の置き方より S から T は到達不可能になる
- ▶ この時の S から到達可能な頂点をカットとするとカット容量は柵の数以下

## 証明

- ▶ 最適な柵の数  $\leq$  最小カット容量 について
- ▶ ヤギのいない頂点の in から out への辺以外の容量は全て INF  
なので、カットから出ていく辺はそのうちのどれかである
- ▶ 対応するマスに柵を置いてみる
- ▶ グラフの作り方から、こうするとヤギは外へ出られない
- ▶ よって柵の数はカット容量以下

## 答え

- ▶ 最小カット容量は、最大流最小カット定理より、S から T への最大流量を求めることで得られるのでそうする

## よくある質問

- ▶ Q:  $100 \times 100 \times 2 = 2 \times 10^4$  頂点くらいあるのにフロー流しても大丈夫なの
- ▶ A: グリッドの端を柵で埋めればヤギを分離できるので、最大流量は 400 以下。フォードファルカーソン法を使っても  $O(|F|E)$  なので余裕

# 統計

- ▶ First Accepted snuke(15:04)
- ▶ Accepted 28
- ▶ Trying 102
- ▶ Total Submission 263

ご清聴ありがとうございました

▶ ご清聴ありがとうございました